МЕТОДЫ РОБАСТНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ МАТРИЦ КОРРЕСПОНДЕНЦИЙ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

УДК 519.8

ИрГТУ, г. Иркутск
Лагерев Р.Ю.
Михайлов А.Ю.

Аннотация

In the past few years there has been considerable interest in the estimation of the Origin Destination traffic (OD) matrix on various networks. This matrix is the volume of traffic for each Origin Destination pair of nodes of the network. It is used for designing the topology of the network, for deciding of routes, for dimensioning the network, etc... But today this matrix cannot be measured directly because this would require a very expensive upgrade of the existing routers. On the contrary the volumes of traffic on each link can be measured very easily. Therefore the Origin Destination traffic matrix must be estimated indirectly from the measured links. In particular we will focus on a linear and quadratic programming algorithmes that we have designed and that was very efficient for Origin-Destination (OD) matrices for freeway corridors using count traffic on the links. We will test this methods on a real and artificial transport network on which the OD volumes are made available by Matlab software. We will compare the performances of the various methods on our dataset. Various statistics criteria are applying for examineting the estimated parameters.

При выполнении проектов организации дорожного движения и реконструкции улично-дорожных сетей (УДС) одним из важнейших видов данных, на основе которых должны приниматься решения, является информация о существующем распределении транспортных потоков. В документах мировой дорожной ассоциации «PIARC» указано, что основным инструментом получения такой информации являются методы восстановления существующих матриц корреспонденций транспортных потоков [2,5]

В нашей стране исследования в области восстановления матриц корреспонденций выполнялись в основном для маршрутов общественного транспорта, где исходной информацией для восстановления пассажирских корреспонденций (т.е. для определения величины корреспонденций между остановочными пунктами) служат данные о количестве входящих и выходящих пассажиров на каждом из остановочных пунктов. Собственно методам восстановления матриц корреспонденций в виде потоков транспортных средств было посвящено лишь несколько исследований, что объясняется относительно меньшим интересом к проблемам их функционирования [1].

В нашей стране оценка существующих матриц корреспонденций транспортных потоков выполняется на основе проведения опроса участников о маршрутах движения или регистрацией транспортных средств, что является очень трудоемким и дорогим исследованием. Тем самым, особую практическую ценность представляет решение задачи восстановления матрицы, применимое к самым распространенным и доступным методам обследований - подсчеты интенсивности движения на отдельных элементах сети. Поскольку при сведении в единую выборку данных интенсивности движения возникают ошибки, методы оценки должны быть робастными – устойчивыми к возникающим грубым ошибкам.

Анализ отечественной и зарубежной специальной литературы и периодики показывает, что робастность методов является наименее изученным вопросом теории оценки существующих матриц корреспонденций.

К числу робастных методов относят, так называемые, L_v-оценки [3,6]:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-\sum_{j=1}^{m}\tilde{x}_j a_{ij}\right|^{v}=\sum_{i=1}^{n}|e_i|^{v}\to\min,\qquad 1\le v<2, \tag{1}$$

где n - число наблюдений (длина выборки); y_i и a_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ - значения зависимой и независимых переменных соответственно; $\tilde{x}_j$, $j=\overline{1,m}$ - подлежащие оцениванию параметры, e_i, $i=\overline{1,n}$ - ошибки аппроксимации, v - фильтр выбросов - чем меньше значение v, тем меньше чувствительность к большим отклонениям.

В.И. Мудров и В.Л. Кушко [3] предлагают выполнять оценку (1) методом вариационно-взвешенных квадратичных приближений (ВВП), сводящийся к взвешенному МНК с весами w_i:

$$\sum_{i=1}^{n}|e_i|^{v}=\sum_{i=1}^{n}e_i^2|e_i|^{v-2}=\sum_{i=1}^{n}e_i^2 w_i\,. \tag{2}$$

На нулевой итерации оценивают регрессию каким-либо методом (например, МНК), получают вектор оценок $\tilde{x}^0$, исходя из которого, получают веса

$$w_i = |e_i|^{v-2} = \left|\tilde{x}_1^0 a_{i1} - \tilde{x}_2^0 a_{i2} - \ldots - \tilde{x}_m^0 a_{im}\right|^{v-2},\ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

следовательно, оценки взвешенного МНК в матричной форме выражаются как:

$$\tilde{x} = (A'WA)^{-1} A'Wy, \tag{4}$$

где $\tilde{x}$ - подлежащий оцениванию вектор неизвестных параметров размерности $m \times 1$; A - матрица независимых переменных размерности $n \times m$; W – диагональная матрица весовых коэффициентов размерности $n \times n$; y - вектор зависимых переменных размерности $n \times 1$.

Частным случаем L_v-оценки (1) является $v = 1$, что приводит к минимизации суммы абсолютных модулей отклонений

$$\sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{m} \tilde{x}_j a_{ij} \right| = \sum_{i=1}^{n} |e_i|. \tag{5}$$

Минимизация (5) намного упростится, если перейти к задаче линейного программирования [6]: минимизировать

$$\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i), \tag{6}$$

где $r_i = \max(0, e_i)$; $s_i = \max(-e_i, 0)$, при условии

$$\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij} + r_i - s_i = y_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$r \geq 0,\ s \geq 0. \tag{8}$$

Здесь r, s - векторы с элементами r_i и s_i соответственно $i = \overline{1,n}$.

Анализ существующих подходов и методов оценки матриц корреспонденций позволяют предложить новые робастные методы оценивания, в основу которых положено описание сети в виде ориентированного графа.

Поскольку объектом оценки является участок УДС, необходима постановка задачи в форме, позволяющей рассматривать распределение потоков по принципу “все или ничего”. С этой целью УДС разделяется на отдельные маршруты движения (рис. 1).

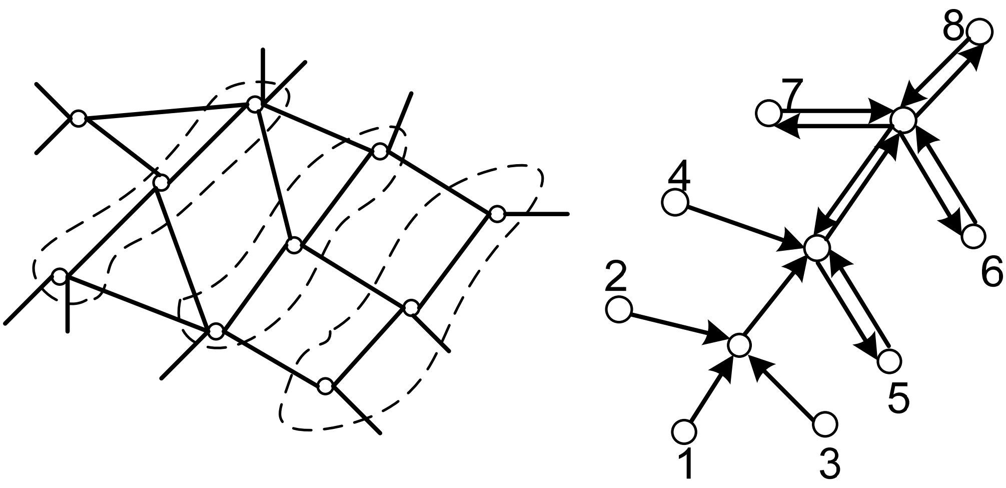


Рис. 1. Схема представления сети в виде ориентированных графов, в каждом из которых корреспондирующие вершины связаны одним маршрутом: 1,2,…,8 корреспондирующие вершины

С учетом такого представления участка сети, маршрутная матрица $A-(n\times m)$ - матрица независимых переменных с компонентами a_{ij} отображает принадлежность j корреспонденции к i дуге, при этом $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{åñëè} \quad j\in i\\ 0 & \text{åñëè} \quad j\notin i\end{cases}$;

n - число звеньев сети, на которых задана интенсивность потока; m - число оцениваемых корреспонденций.

Оценка вектора корреспонденций $\tilde{x}$, выполняется решением задачи (5), т.е. определяются такие значения вектора $\tilde{x}$, при которых расчетная интенсивность на дугах графа $(\tilde{y}=A\cdot\tilde{x})$ максимально близко соответствует замеренным значениям интенсивности потока y:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|e_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|y_i-\tilde{y}_i\right|\to\min, \qquad (9)$$

где e_i - остатки регрессии; y_i - замеренные значения интенсивности потока на дугах графа, $\tilde{y}_i$ - расчетные значения интенсивности потока.

С учетом ввода фиктивных переменных оценка вектора корреспонденций $\tilde{x}$ размерности $(m\times 1)$ сводится к задаче линейного программирования для нового вектора столбца параметров $x2=(x_1,x_2,...,x_m,r_1,r_2,...,r_n,s_1,s_2,...,s_n)$ размерности $(m+2n)\times 1$, в котором $m-$элементы вектора корреспонденций $\tilde{x}$, $2n-$фиктивные переменные.

В целевую функцию (6), являющейся суммой модулей ошибок, входит лишь часть вектора переменных $x2$ - элементы с индекса $m+1$. Следовательно, f - вектор коэффициентов при оцениваемых переменных $x2$ формируется по принципу: первые m элементы=0; элементы с индекса $m+1=\begin{cases}1, & \text{ï ðè} \quad e_i \geq 0\\ 0, & \text{èí à÷å}\end{cases}$;

элементы с индекса $m+n+1=\begin{cases}0, & \text{ï ðè} \quad e_i \geq 0\\ 1, & \text{èí à÷å}\end{cases}$

Матрица независимых переменных A размерности $n\times m$ преобразуется в матрицу $A2$ размерности $n\times(m+2n)$, т.е. дополняется двумя диагональными матрицами размерности $n\times n$: $d1=\begin{cases}1, & \text{ï ðè} \quad e_i \geq 0\\ 0, & \text{èí à÷å}\end{cases}$ и $d2=\begin{cases}0, & \text{ï ðè} \quad e \geq 0\\ -1, & \text{èí à÷å}\end{cases}$.

С учетом вышеизложенного, задача (5), применительно к модели восстановления матриц корреспонденций, формулируется в следующем виде:

$$\min \sum_{j=1}^{m+2n} f_j^T x2_j \tag{10}$$

при линейных ограничениях на переменные $A2x2=y$; $\tilde{x}\geq 0$ и двухсторонних ограничениях $xlb \leq x2 \leq xub$.

Также предлагается алгоритм оценки матриц корреспонденций с использованием квадратичного программирования со смешанными ограничениями следующего вида:

$$\min \sum_{j=1}^{m+2n} \left(\frac{1}{2} x2_j H x2_j + f_j^T x2_j\right), \tag{11}$$

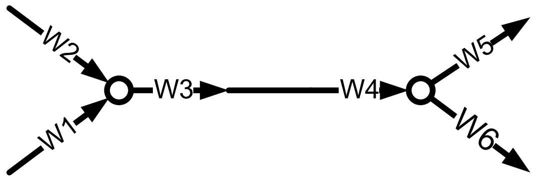
при ограничениях $A2x2=y$, $\quad xlb \leq x2 \leq xub$, $\quad \tilde{x}\geq 0$.

Здесь $x2-$ вектор оцениваемых параметров размерности $(m+2n)\times 1$; $H-$ матрица Гессе, $(m+2n)\times(m+2n)$; f –вектор коэффициентов целевой функции $(m+2n)\times 1$; $A2$–матрица коэффициентов линейных ограничений $n\times(m+2n)$;

y–вектор правых частей линейных ограничений $n \times 1$; xlb–вектор нижних ограничений оцениваемых параметров $(m+2n)\times 1$, $xlb \geq 0$; xub–вектор верхних ограничений $(m+2n)\times 1$, $xub \geq 0$.

С учетом переиндексации искусственных переменных, решением задач (10, 11) является часть вектора $x2_j$, $j=\overline{1,m}$, т.е. вектор $\tilde{x}$.

Исходными данными при проведении эксперимента являются данные измерений интенсивности транспортного потока, выполняемые в одно и тоже время суток в различные дни. При сведении данных в единую выборку возникают расхождения данных на перегонах. Выражается это в том, что рассчитанные по данным измерений на смежных перекрестках величины входящего и выходящего потоков имеют разные значения (рис. 2). В этой связи необходимо предложить методику оценки точности исходных данных и выявления в них выбросов (т.е. грубых ошибок).



$$W_1 + W_2 = W_3$$
$$W_4 = W_5 + W_6$$
$$W_3(in) \neq W_4(out)$$

Рис. 2. Типичная ситуация, в которой входящие на перегон потоки имеют расхождения с выходящими

Для оценки однородности выборок значений потоков и выявления выбросов используются значения разностей пар $d_i = W(in)_i - W(out)_i$ [3, 4].

Так для оценки ошибок сравниваются две выборки, одна из которых состоит из значений интенсивности движения потоков, входящих на перегоны, вторая – выходящих. Для этого используются: критерий Стьюдента для разностей пар, критерии Вилкоксона, критерий знаков, коэффициент корреляции между *W(out)* и *W(in).* Кроме проверки близости выборок *W(out)*$_i$ и *W(in)*$_i$ точность обследований оценивается: средним абсолютным отклонением разностей пар $mad = \sum_{i=1}^{n} \left| d_i - \bar{d} \right| / n$, средней абсолютной ошибкой $\bar{d}_{abs} = \sum_i \left| d_i \right| / n$, отношением средней абсолютной ошибки к среднему значению интенсивности движения на перегоне в одном направлении $E = \bar{d}_{abs} / \bar{V}$.

Все рассмотренные в работе выборки входящих и выходящих потоков оценены как относящиеся к одним и тем же генеральным совокупностям со статистической значимостью 5%.

Тестирование предлагаемых методов восстановления матриц корреспонденций выполняется в три этапа:

1 **этап**. Тестирование на примере искусственных данных без ошибок (матрица корреспонденций задана);

2 **этап**. Тестирование на примере искусственных данных с грубыми ошибками (матрица корреспонденций задана);

3 **этап**. Тестирование на примере реальных УДС (подходы к старому ангарскому мосту, улица Карла Маркса в г. Иркутске).

Тестирование выполняется по следующей схеме:

- задается искусственная матрица корреспонденций, преобразованная в вектор столбец x_j, и соответствующие этой матрице точные значения интенсивности движения на дугах графа $y = Ax$;
- выполняется восстановление матрицы корреспонденций и оценивается точность восстановления, скорость сходимости, робастность – устойчивость к выбросам.

На первых двух этапах тестирования наиболее важным является оценка точности корреспонденций (рис. 3, рис.6). Наибольшее внимание уделяется сравнению заданных значений x_j и оцененных $\tilde{x}_j$. Тесты на примере искусственных данных корреспонденций, для сети на подходах к старому мосту через Ангару, выявили их работоспособность в случае плохо обусловленных матриц (рис.3, рис.4).

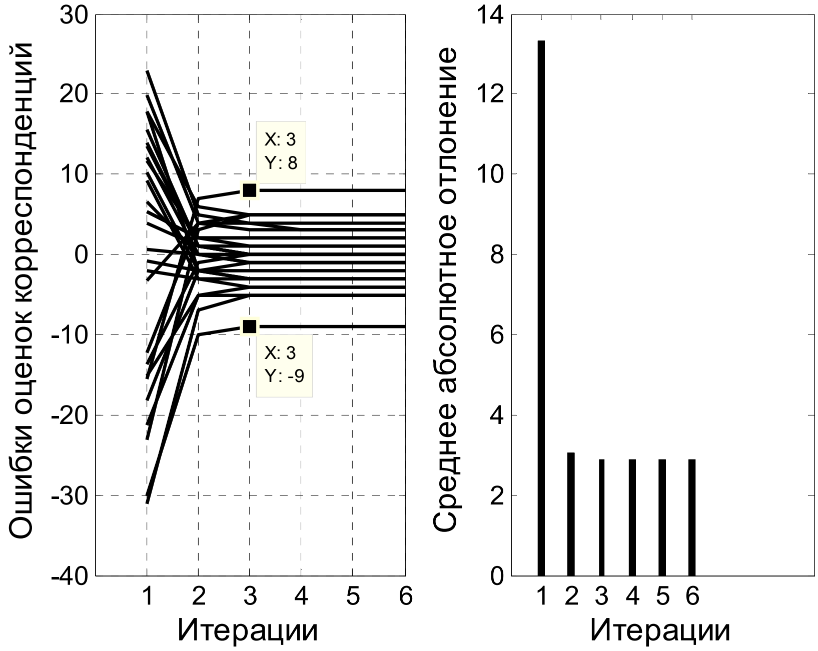


Рис. 3. Оценка сходимости корреспонденций (искусственная матрица корреспонденций, сеть - подходы к старому ангарскому мосту в г. Иркутске)

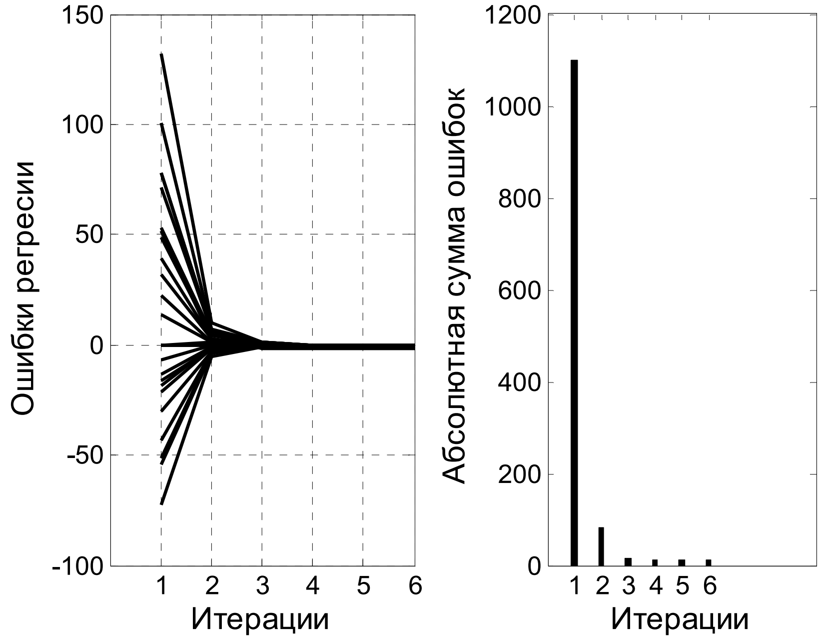


Рис. 4. Ошибки сходимости потоков $e_i = y_i - \tilde{y}_i$ (искусственная матрица корреспонденций, сеть - подходы к старому ангарскому мосту в г. Иркутске)

Тестирование методов на примере искусственных матриц корреспонденций с особо грубыми ошибками (вариационный размах $\pm 30\%$) также показывает, что методы сохраняют сходимость (рис.5). Кроме того, при экстремальном загрязнении исходных данных методы восстанавливают значения потоков с меньшими ошибками, чем вносятся в исходные данные. Так, вариационный размах внесенных ошибок составляет -496…239, а получаемый в процессе восстановления –229…225.

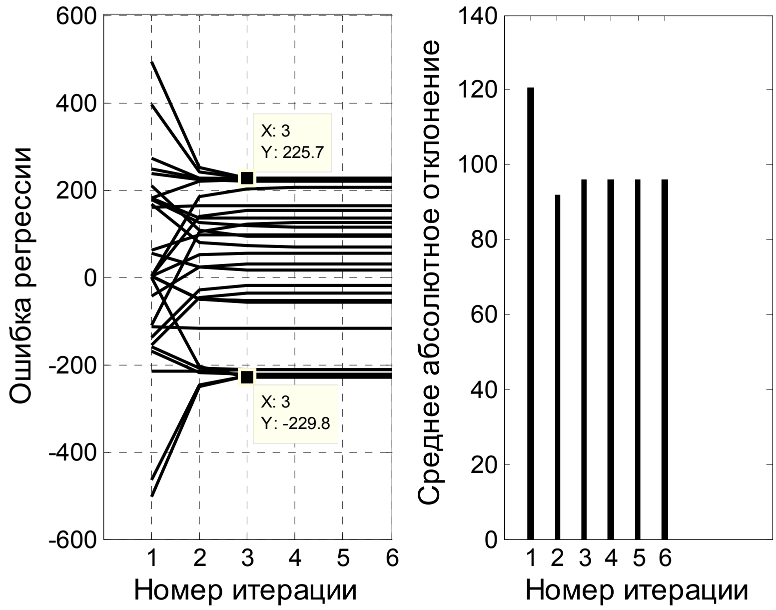


Рис. 5. Ошибки сходимости потоков (размах ошибок исходных данных –496 … 239 искусственные данные с грубыми ошибками)

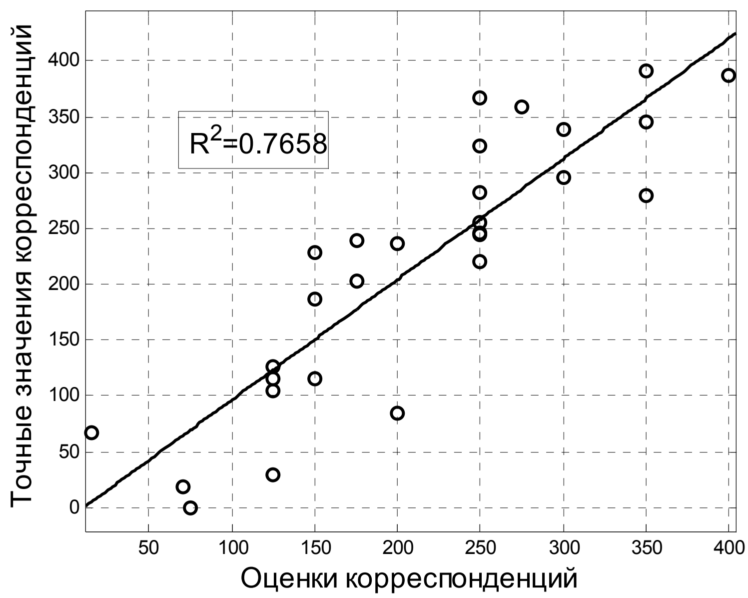
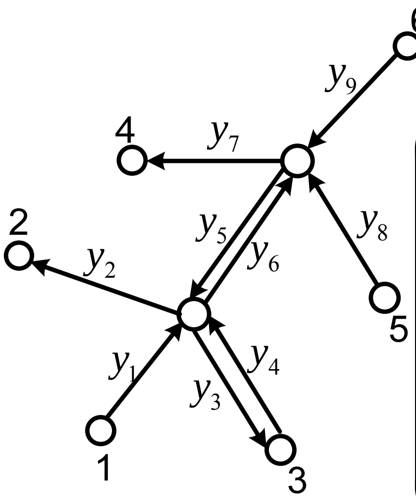


Рис. 6. Ошибки сходимости корреспонденций на 2 итерации (размах ошибок искусственных данных –496 … 239)

Предлагаемые алгоритмы оценки матриц корреспонденций требуют формализованного представления сети в форме (рис. 7), детально отображающей участок сети и одновременно соответствующей задачам линейного и квадратичного программирования со смешанными ограничениями.

Используется описание сети, при котором корреспонденции, реализуемые по нескольким путям, рассматриваются как набор отдельных корреспонденций. Участок сети разбивается на графы так, чтобы корреспондирующие вершины соединялись только одним маршрутом (см. рис.1).



$$y = A \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}_{n\times m} \times \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{32} \\ x_{34} \\ x_{52} \\ x_{53} \\ x_{54} \\ x_{62} \\ x_{63} \\ x_{64} \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

Рис. 7. Представление в матричной форме задачи оценки распределения потоков по данным загрузки дуг графа (1-6 корреспондирующие вершины)

В результате такой декомпозиции сети, матрица A, отображающая принадлежность корреспонденций дугам графа, является булевой, что более предпочтительно с позиций подготовки и ввода исходных данных, их контроля и визуализации (рис. 7).

В результате оценки вектора корреспонденций $\tilde{x}$ потоков получается целый ряд оценок в векторной форме (табл. 2).

Опыт применения предлагаемой методики оценки корреспонденций на реальных УДС показывает, что метод наилучшим образом соответствует задачам локальной реконструкции УДС и адресных мероприятий организации движения, эффективен при использовании в случаях, когда невозможно проводить сбор данных о маршрутах следования транспортных средств, позволяет дополнять обследования, выполняемые выборочным анкетированием водителей, регистрацией номеров транспортных средств.

Предлагаемая методика оценки матриц корреспонденций проста и доступна для использования, основана на применении функций стандартных математических библиотек: LP, QP – библиотеки Optimization Toolbox 2.0 версий пакета MATLAB 5.1 и 5.2; LINPROG, QUADPROG – библиотеки Optimization Toolbox 2.2 версии пакета MATLAB 6.1, 6.5, 7.0.

Литература

1. Брайловский Н.О., Грановский Б.И. Моделирование транспортных систем. – М.: Транспорт, 1978. – 125 с.
2. Васильева Е.М., Левит Б.Ю., Лившиц В.Н. Нелинейные транспортные задачи на сетях. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 104 с.
3. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
4. Джонсон Н, Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. М.: Мир. 1980. – 510 с.
5. Михайлов А.Ю., И.М. Головных. Современные тенденции проектирования и реконструкции улично-дорожных сетей. – Новосибирск: Наука, 2004. – 266 с.
6. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. – Иркутск, РИЦ ГП Облинформпечать, 1996. – 320 с.